構成的解析学における関係の連続性

吉田　聡

公立鳥取環境大学
Tottori University of Environmental Studies

※古澤仁（鹿児島大）氏との共同研究

※本研究はJSPS科研費 JP20K03721の助成を受けたものです。

SLACS 2021

©2021 YOSHIDA Satoru

関係の連続性

- ここでの関係とは「2つの集合の直積集合の部分集合」。
- 普通に数学をやっていて, 関係の連続性を議論する機会は少ない？
- 関係の連続性を用いている分野：数理経済学

- 参考にしたもの：計算可能数学におけるBrattka and Hertling[94]などの議論

- 本日の目標
  - 通常の数学および構成的数学において関数の一般化を考えることの意義を明らかにする
  - 構成的解析学（Bishopの構成的数学）における点列連続性と連続性の差異を明らかにする

©2021 YOSHIDA Satoru

目次

©2021 YOSHIDA Satoru

1. Bishopの構成的数学

©2021 YOSHIDA Satoru

BHK解釈

構成的数学はBHK（Brouwer-Heyting-Kolmogorov）
解釈の下で展開される数学

	$\boldsymbol{A \vee B}$	$\boldsymbol{\exists x A}$
通常の数学の解釈	$\neg A \wedge \neg B$を 仮定すると矛盾	$\forall x \neg A$ を仮定すると矛盾
BHK解釈	AまたはBの 判定手続きを明示できる	$A(c)$を満たすcを 構成する手続きを明示できる

BHK解釈は通常の数学においても許容されるが、通常の数学は
別の解釈も許容する。

©2021 YOSHIDA Satoru

構成的証明

- BHK解釈の下で許容される証明

- 構成的数学では、
  - ✓定理：仕様
  - ✓証明：仕様を実行するアルゴリズム

と理解することができる。

©2021 YOSHIDA Satoru

BHK解釈の下での制限

- 通常の数学の論理的規則のうち、BHK解釈の下では許容されないものがある。

例：

任意のプログラムPに対して、数列 $\{a_n^P\}$を以下のように定義する

$$a_n^P = \begin{cases} 1 & (P\text{は}n\text{ステップ目で停止}) \\ 0 & (\text{それとは異なる場合}) \end{cases}$$

©2021 YOSHIDA Satoru

- 以下の命題はBHK解釈の下では成り立たない。

$$\forall P[\exists n(a_n^P = 1) \lor \forall n(a_n^P = 0)]$$

- 実際、BHK解釈の下でこの命題が成り立つとすると、任意のプログラムに対して停止性が判定できることになってしまう。

©2021 YOSHIDA Satoru

- このことから、BHK解釈の下では以下の命題（the limited principle of Omnuscience, LPO)は成り立たない：

$$\forall \{a_n\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}[\exists n(a_n = 1) \vee \forall n(a_n = 0)]$$

- 以下も同様：

排中律: 任意の命題Aに対して、$A \vee \neg A$

構成的数学

- 構成的数学(constructive mathematics)はBHK解釈の下で展開される数学体系の総称

- 構成的数学の代表的な3つ体系
  - E. Bishopの構成的数学（構成的解析学）
  - L.I.J. Brouwerの直観主義数学
  - A.A. Markov. Jrの学派の構成的帰納的数学

©2021 YOSHIDA Satoru

- 定理の集合としては、直観主義数学、構成的帰納的数学、通常の数学はそれぞれ一致しない。
- それらの共通部分の真部分集合としてBishopの構成的数学が含まれる。
- 本発表はBishopの構成的数学を基本的な枠組みとする。

©2021 YOSHIDA Satoru

Operation

- E. Bishopは1967年のモノグラフ
  “Foundations of constructive analysis”
  において、
  次の集合Xから集合Yへの operation を議論している。
  「任意のXの元に対して集合Yの部分集合を対応させるルール」

- これは「全域的な関係」または「多値関数」である。

©2021 YOSHIDA Satoru

- 集合Xから集合Yへの関数（写像）fとは,
  Xの元をYの元に対応させるルールであり、
  次の２つの条件を満たす：
  - ✓任意のXの元xに対して, $y = f(x)$を満たすYの元yが存在する（全域性）
  - ✓任意のXの元x, x'対して、$x = x'$ならば $f(x) = f(x')$（一意性）

- この発表では、Brattka and Hertling[‘94]の議論に倣い、
  全域性も一意性も仮定しない関係を基本とする。

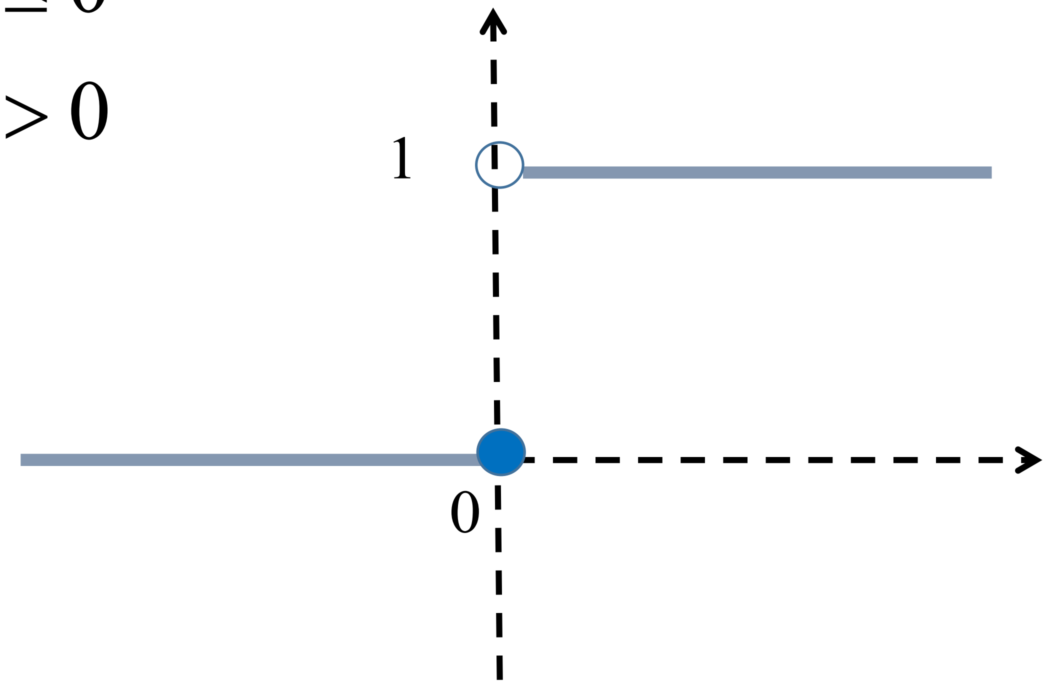
©2021 YOSHIDA Satoru

2. 関数の一般化として
関係を考えることの意義

©2021 YOSHIDA Satoru

不連続関数の取り扱い

$$F(x)=\begin{cases}0 & if \quad x\le 0\\ 1 & if \quad x>0\end{cases}$$



©2021 YOSHIDA Satoru

- $\mathbb{R}$ から2点集合 $\{0,1\}$ への関係として,
  Fは次のように定義できる：

$$F \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \{0,1\} | (x \leq 0 \rightarrow y = 0) \land (x > 0 \rightarrow y = 1)\}$$

- 一方、次がBishopの構成的数学において同値：
  - ✓Fは$\mathbb{R}$ から2点集合 $\{0,1\}$ への関数
  - ✓$\forall r \in \mathbb{R}[\, r \leq 0 \ \lor \ r > 0\,]$
  - ✓LPO：$\forall \{a_n\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}[\, \exists n(a_n = 1) \lor \forall n(a_n = 0)]$

©2021 YOSHIDA Satoru

- Bishopの構成的数学において、
  Fが関数であること（全域的であること）は証明できない。

- Fのような不連続関数を直接的に取り扱う枠組みが構成的数学には無かった。
  - 直観主義数学、構成的帰納的数学それぞれにおいて、<u>すべての関数は連続</u>
  - Bishopの構成的数学の場合, 通常の数学において<u>不連続な関数の存在は証明できない</u>。

- 関数を関係としてとらえることで、Bishopの構成的数学においても直接的に不連続関数を捉えることができる。

選択関数

選択公理(AC)
X, Y: 集合

$$\forall R \subseteq X \times Y \left[\forall x \in X \exists y \in Y \big((x, y) \in R \big) \rightarrow \exists f \in X \rightarrow Y \forall x \in X \Big(\big(x, f(x) \big) \in R \Big) \right]$$

©2021 YOSHIDA Satoru

- この選択公理について, 全域的な関係が得られたら,
そこから関数（全域的かつ一意的な関係）が得られる、
と理解できる。

- 位相空間論は関数を軸に位相的性質に関する理論を与えている。
- 通常の位相空間論においてチコノフの定理、整列可能定理、ツォルンの補題などは選択公理と同値.

©2021 YOSHIDA Satoru

- 関係を軸とした位相空間論は、
関数を軸としたよりも一般的となる。

- 関係を軸とした位相空間論の構築により、
選択公理から得られる
「全域的な関係から一意的な関係が得られる」
の本質的な役割が明らかになることが期待される。

©2021 YOSHIDA Satoru

特に, Bishopの構成的数学において、

- 19ページの形の選択公理は構成的数学に許容されない
  - ✓Bishopの構成的数学において、
この選択公理から排中律などを導くことができる。

- 19ページの形の選択公理などを必要としない位相空間論を構築するにあたって, 関係を軸とすることで, Bishopの構成的数学において展開できる範囲を広げることが期待される。

©2021 YOSHIDA Satoru

３. 関係の連続性

©2021 YOSHIDA Satoru

X, Y: 距離空間, $R :\subset X \times Y$, $A :\subset X, B \subset Y, x \in X, y \in Y.$

$[x]R := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$
$[A]R := \{y \in Y \mid \exists x \in A\big((x, y) \in R\big)\}$

$R[y] := \{x \in X \mid (x, y) \in R\}$
$R[B] := \{x \in X \mid \exists y \in B\big((x, y) \in R\big)\}$

$\mathrm{dom}(R) := \big\{x \in X \mid \exists y \in Y\big((x, y) \in R\big)\big\}$

$N\big(x, 2^{-k}\big) := \{x' \in X \mid d(x, x') < 2^{-k}\}$

©2021 YOSHIDA Satoru

(Brattka and Hertling, ‘94)

$(X,d),(Y,d')$: 距離空間. R:$\subset X\times Y$.

(x,y):$\in X\times Y$.

- Rは$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$で**各点連続** $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$
  $$\forall k \exists n\, \forall x' \in N(x,2^{-n}) \cap dom(R) \left[[x']R \cap N\left(y,2^{-k}\right) \neq \emptyset\right].$$
- Rは各点**連続** $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ Rは任意の$(x,y)\in R$で連続。

この連続の定義を踏まえて、関係の点列連続性を定義する。

- Rは$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$で**点列連続** $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\{x_n\} \in \mathrm{dom}(R)^{\mathbb{N}}$
$$\left[\begin{array}{c} x_m \to x\ (n \to \infty)\ \Rightarrow \\ \forall k \exists N\ \forall \mathrm{n} \geq N\left([x_m]R \cap N\left(y, 2^{-k}\right) \neq \emptyset\right) \end{array}\right].$$

- Rは**点列連続** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Rは任意の$(x,y) \in R$で点列連続。

©2021 YOSHIDA Satoru

f: XからYへの関数

- fはXで**連続** $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\forall x \in X \forall k \exists n\ \forall x' \in N(x, 2^{-n})$ $\left[f(x') \in N\left(f(x), 2^{-k}\right)\right]$.
- fはXで**点列連続** $\overset{\text{定義}}{\iff}$ $\forall x \in X \forall \{x_m\}$ $\left[x_m \to x\ \ (n \to \infty) \Rightarrow \forall k \exists M \forall m \geq M\left[f(x_m) \in N\left(f(x), 2^{-k}\right)\right]\right]$.
- $G_f \coloneqq \{(x, y) : y = f(x)\}$とすると, 次が成り立つ.
  - ✓fがXで連続$\Leftrightarrow$ G_fは連続.
  - ✓fがXで点列連続$\Leftrightarrow$ G_fは点列連続.

©2021 YOSHIDA Satoru

4.「点列連続関係は連続」について

©2021 YOSHIDA Satoru

BD、BD-N

- $\mathbb{N}$の部分集合Aが次を満たすとき, **pseudobounded** と言う：
  $\forall\{a_m\} \in A^{\mathbb{N}} \exists M \in \mathbb{N} \forall m \geq M(a_m < m)$.

- A が上に有界ならばAはpseudobounded.
- 通常の数学においては,

$$\neg\forall\{a_m\} \in A^{\mathbb{N}} \exists M \in \mathbb{N} \forall m \geq M(a_m < m)$$
$$\Leftrightarrow \exists\{a_m\}\forall M \in \mathbb{N} \exists m \geq M(a_m \geq m)$$

©2021 YOSHIDA Satoru

BD: 元を持つℕの任意のpseudoboundedな集合は有界。

BD-N: 元を持つNの任意の可算なpseudoboundedな集合は有界。

- BDはBD-Nを含意する。
- BD-NはBishopの体系に対してその肯定も否定も証明できない（**独立**）。BDも同様。
- BD-Nは直観主義数学、構成的帰納的数学において証明可能。

©2021 YOSHIDA Satoru

locatedな集合

距離空間(X, d)の部分集合Aについて, 任意のXの点xに対して集合$\{d(x, a): a \in A\}$の$\mathbb{R}$における下限が存在するとき, AはXにおいて located であると言う.

例：

- １点集合はlocated.
- 任意0-1列$\{a_n\}$が$\mathbb{R}$においてlocatedであると仮定すると,
  集合 $\{d(1, a_n): n \in \mathbb{N}\}$ の下限が存在するので、
  $\exists n(a_n = 1)$または$\forall n(a_n = 0)$の判定が可能になる.

©2021 YOSHIDA Satoru

X, Y: 距離空間.

R: $\subset X \times Y$.

このとき、

Rは正規 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$

dom(R)の各点xに対して, Y においで$[x]R$はlocated.

すべての関数は正規な関係である。

©2021 YOSHIDA Satoru

補題1　X, Y: 距離空間. $R :\subset X \times Y$. Rは正規とする。
このとき, BDを仮定すると,
R は点列連続　$\Rightarrow$ R は各点連続.

- Rが関数のとき、　「R は点列連続　$\Rightarrow$ R は各点連続」と BDは同値[Is92].

定理1　X, Y: 距離空間. $R :\subset X \times Y$. Rは正規とする。
このとき, 「R は点列連続　$\Rightarrow$ R は各点連続」とBD は同値.

©2021 YOSHIDA Satoru

補題2　X, Y: 距離空間. R:$\subset X \times Y$. Rは正規とする。
さらに, Rは次を満たす：
- dom(R) はXの可分な部分空間.

このとき, BD-Nを仮定すると,
R は点列連続　$\Rightarrow$ R は各点連続.

- X: 可分距離空間, Y: 距離空間, R:関数であるとき,
「R は点列連続　$\Rightarrow$ R は各点連続」とBD-N は同値[Is92].

定理2　X, Y: 距離空間. R:$\subset X \times Y$. Rは正規とする。
dom(R) はXの可分な部分空間であるとき、
「R は点列連続　$\Rightarrow$ R は各点連続」とBD-N は同値.

©2021 YOSHIDA Satoru

X, Yを距離空間とし, fをXからYへの関数とする. このとき,
通常の数学では以下が同値:

- f は連続関数.
- Y の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$はXの開集合.
- Y の閉集合 F に対して, $f^{-1}(F)$はXの閉集合.
- Xの部分集合Aに対して, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ （$\overline{S}$はSの閉包）.
- fは点列連続.

関係の連続性について、次のことが分かっている：

©2021 YOSHIDA Satoru

R をXからYへの関係とする.
このとき, 通常の数学において以下が同値[FY19]:

- R は各点連続
- Y の開集合 O に対して, $R[O]$はdom(R)の開集合.
- Y の閉集合 F に対して, $R[\![F]\!] \cap \mathrm{dom}(R)$はdom$(R)$の閉集合.
- dom(R)の部分集合Aに対して, $[\,\overline{A}\,]R \subset \overline{R[A]}$.
- fは点列連続.

ただし, $R[\![F]\!] \coloneqq \{x \in X : [x]R \subset F\}$

©2021 YOSHIDA Satoru

Bihsopの構成的数学においても, 次が証明できる。

定理3.

X:完備距離空間. Y:距離空間. R:$\subset X \times Y$.
$\mathrm{dom}(R)$ はXにおける閉集合. Rは正規とする.

このとき,

- R は各点連続 $\Leftrightarrow$
  Y の開集合 O に対して, $R[O]$は$\mathrm{dom}(R)$の開集合.
- Rは点列連続 $\Leftrightarrow$
  Y の閉集合 F に対して, $R[\![F]\!] \cap \mathrm{dom}(R)$は$\mathrm{dom}(R)$の閉集合.

©2021 YOSHIDA Satoru

定理4. X:完備距離空間． Y:距離空間． R:$\subset X \times Y$.
dom(R) はXにおける閉集合． Rは正規とする.

さらに, 次が成り立つとする：

- dom(R)の任意の部分集合 S に対して,
  $S^C \cap$ dom(R) が dom(R) の閉集合ならば
  Sはdom(R) の開集合． (S^CはSの補集合）

このとき、

Rは各点連続 $\Leftrightarrow$ Rは点列連続.

©2021 YOSHIDA Satoru

今後の課題：他の連続性概念の検討

- 今回はBrattka and Hertling[‘94]の連続性と、それを踏まえて与えることができた点列連続性とのBishopの構成的数学における同値性について検討した。

- 今後の課題として、
  1. Berge [’63] と Brattka and Hertling[‘94] それぞれの連続性
  2. それぞれから派生する連続性

これらの分類が求められる

©2021 YOSHIDA Satoru

参考文献

- Claude Berge: Topological Spaces: including a treatment of multi-valued functions, vectorspaces and convexity. Oliver and Boyd (1963).
- Vasco Brattka and Peter Hertling: Continuity and computability of relations, Informatik Berichte No. 164, FernUniversitaet in Hagen (1994).
- Hajime Ishihara: Continuity properties in constructive mathematics, J. Symbolic Logic No. 56 (1992), 556-565.
- Hitoshi Furusawa and Y: A note on continuity properties of relations, rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., No. 52, pp.1-6 (2019).

©2021 YOSHIDA Satoru