関係の各点連続性と点列連続性

吉田　聡
公立鳥取環境大学
Tottori University of Environmental Studies

※古澤仁（鹿児島大）氏との共同研究

第7回山陰基礎論・解析学研究集会
2020年1月12日

関係の連続性

- ここでの**関係**とは，「2つの集合の直積集合の部分集合」。
- 普通に数学をやっていて，関数の一般化としてその連続性を議論する機会は少ない？
- 関係の連続性を用いている分野：数理経済学
- 参考にしたもの：計算可能数学における議論[BH94]
- 本日の到達点：Bishopの構成的数学に対して以下は独立な命題：
  - ✓X, Y: 距離空間. R:⊂$X \times Y$.
    このとき, R は点列連続　$\Rightarrow$ R は連続

目次

1. Bishopの構成的数学

BHK解釈

構成的数学はBHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov)
解釈の下で展開される数学

	$A \vee B$	$\exists x A$
通常の数学の解釈	$\neg A \wedge \neg$Bを仮定すると矛盾	$\forall x \neg A$を仮定すると矛盾
BHK解釈	AまたはBの判定手続きを明示できる	$A(c)$を満たすcを構成する手続きを明示できる

BHK解釈は通常の数学においても許容されるが、通常の数学は他の解釈も許容する。

構成的証明

- BHK解釈の下で許容される証明
- 構成的数学では、
  - 定理：仕様
  - 証明：仕様を実行するアルゴリズム

  と理解することができる。

BHK解釈の下での制限

- 通常の数学の論理的規則のうち、BHK解釈の下では許容されないものがある。

例：任意のプログラムPに対して、数列$\{a_n^P\}$を

$$a_n^P = \begin{cases} 1 & (P\text{は}n\text{ステップ目で停止}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

によって定義するとき、以下の命題はBHK解釈の下では許容されない。

$$\forall P \left[\exists n \left(a_n^P = 1\right) \vee \forall n \left(a_n^P = 0\right)\right]$$

- 実際にBHK解釈の下でこの命題が成り立つとすると、任意のプログラムに対して停止性が判定できることになってしまう。

- BHK解釈の下では、以下は証明できない：

$$\forall \{a_n\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} [\exists n(a_n = 1) \vee \forall n(a_n = 0)]$$

- さらに、以下も同様：

  排中律:　任意の命題Aに対して、$A \vee \neg A$

構成的数学

- 構成的数学(constructive mathematics)は BHK解釈の下で展開される数学体系の総称
- 構成的数学の代表的な3つ体系：
  - E. Bishopの構成的数学
  - L.I.J. Brouwerの直観主義数学(intuitionistic mathematics)
  - A.A. Markov. Jrの学派の構成的帰納的数学 (constructive recursive mathematics)
- 定理の集合としては、直観主義数学、構成的帰納的数学、通常の数学はそれぞれ一致しない。
- それらの共通部分の 真部分集合としてBishopの構成的数学が含まれる。

2.関係の連続性

X, Y: 距離空間, $R :\subset X \times Y$, $A :\subset X, B \subset Y, x \in X, y \in Y$.

$[x]R \coloneqq \{y \in Y |\ (x, y) \in R\}$
$[A]R \coloneqq \{y \in Y |\ \exists x \in A\big((x, y) \in R\big)\}$
$R[y] \coloneqq \{x \in X |\ (x, y) \in R\}$
$R[B] \coloneqq \{x \in X | \exists y \in B\big((x, y) \in R\big)\}$
$\mathrm{dom}(R) \coloneqq \big\{x \in X | \exists y \in Y\big((x, y) \in R\big)\big\}$
$N\big(x, 2^{-k}\big) \coloneqq \{x' \in X |\ d(x, x') < 2^{-k}\}$

(Brattka and Hertling, '94)
$(X, d), (Y, d')$: 距離空間. $R :\subset X \times Y$.
$(x, y) :\in X \times Y$.

- Rは$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$で連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall k \exists n\, \forall x' \in N(x, 2^{-n}) \cap dom(R)$ $\Big[[x']R \cap N\big(y, 2^{-k}\big) \neq \emptyset\Big]$.
- Rは連続$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$Rは任意の$(x, y) \in R$で連続。

この連続の定義を踏まえて、関係の点列連続性を定義する。

- Rは$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$で点列連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\{x_n\} \in \mathrm{dom}(R)^{\mathbb{N}}$
$$\begin{bmatrix} x_m \to x\ (n \to \infty)\ \Rightarrow \\ \forall k \exists N\ \forall \mathrm{n} \geq N\left([x_m]R \cap N\left(y, 2^{-k}\right) \neq \emptyset\right) \end{bmatrix}.$$
- Rは点列連続$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$Rは任意の$(x,y) \in R$で点列連続。

f: XからYへの関数

- fはXで連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X \forall k \exists n\ \forall x' \in N(x, 2^{-n})$
$$\left[f(x') \in N\left(f(x), 2^{-k}\right)\right].$$
- fはXで点列連続 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$
$\forall x \in X \forall \{x_m\}$
$$\left[x_m \to x\ \ (n \to \infty) \Rightarrow \forall k \exists M \forall m \geq M\left[f(x_m) \in N\left(f(x), 2^{-k}\right)\right]\right]$$
.
- $G_f \coloneqq \{(x,y): y = f(x)\}$とすると, 次が成り立つ.
  - ✓fがXで連続⇔ G_fは連続.
  - ✓fがXで点列連続⇔ G_fは点列連続.

3.「点列連続関係は連続」について

BD、BD-N

- ℕの部分集合Aが次を満たすとき, pseudobounded と言う：
$\forall\{a_m\} \in A^{\mathbb{N}} \exists M \in \mathbb{N} \forall m \geq M(a_m < m)$.
- A が上に有界ならばAはpseudobounded.
- 通常の数学においては,
$$\neg\forall\{a_m\} \in A^{\mathbb{N}} \exists M \in \mathbb{N} \forall m \geq M(a_m < m)$$
$$\Leftrightarrow \exists\{a_m\} \forall M \in \mathbb{N} \exists m \geq M(a_m \geq m)$$

つまり, 通常の数学においては, 集合Aがpseduobounded であることと, 集合Aが狭義単調増加列を含まないことと同値である。

BD: 元を持つNの任意のpseudoboundedな集合は有界。

BD-N: 元を持つNの任意の可算なpseudoboundedな集合は有界。

- BDはBD-Nを含意する。
- BD-NはBishopの体系に対してその肯定も否定も証明できない（独立）。BDも同様。

locatedな集合

距離空間(X,d)の部分集合Aについて, 任意のXの点xに対して集合$\{d(x,a): a \in A\}$の$\mathbb{R}$における下限が存在するとき, AはXにおいて located であると言う.

例：

- 1点集合はlocated.
- 任意0-1列$\{a_n\}$が$\mathbb{R}$においてlocatedであると仮定すると, 集合 $\{d(1,a_n): n \in \mathbb{N}\}$ の下限が存在するので、$\exists n(a_n = 1)$または$\forall n(a_n = 0)$の判定が可能になる.

補題　X, Y: 距離空間. $R: \subset X \times Y$.
dom(R)の各点xに対して, Y において$[x]R$はlocated.
このとき, BDを仮定すると,
R は点列連続 $\Rightarrow$ R は各点連続.

- Rが特に関数であるとき、各[x]Rは1点集合なのでlocated.
- Rが関数のとき、「R は点列連続 $\Rightarrow$ R は各点連続」とBDは同値[Is92].

定理　X, Y: 距離空間. $R: \subset X \times Y$.
Xの各点xに対して, Y において$[x]R$はlocated.
このとき,「R は点列連続 $\Rightarrow$ R は各点連続」とBD は同値.

補題　X, Y: 距離空間. $R: \subset X \times Y$. さらに, Rは次を満たす：
① dom(R)の各点xに対して, $[x]R$はY において located.
② dom(R) はXの可分な部分空間.
このとき, BD-Nを仮定すると,
R は点列連続 $\Rightarrow$ R は各点連続.

- X: 可分距離空間, Y: 距離空間, R:関数であるとき, 「R は点列連続 $\Rightarrow$ R は各点連続」とBD-N は同値[Is92].

定理　X, Y: 距離空間. $R: \subset X \times Y$.
Rが上記補題①, ② を満たすとき、
「R は点列連続 $\Rightarrow$ R は各点連続」とBD-N は同値.

4.今後の課題

よく知られた連続性との同値性の検討

X, Yを距離空間とし, fをXからYへの関数とする. このとき,
通常の数学では以下が同値:

- f は連続関数.
- Y の開集合 O に対して, $f^{-1}(O)$はXの開集合.
- Y の閉集合 F に対して, $f^{-1}(F)$はXの閉集合.
- Xの部分集合Aに対して, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ （$\overline{S}$はSの閉包）.
- fは点列連続.

関係の連続性について、次のことが分かっている：

R をXからYへの関係とする. このとき, 通常の数学において以下が同値[FY19]:

- R は連続関数.
- Y の開集合 O に対して, $R[O]$はdom(R)の開集合.
- Y の閉集合 F に対して, $R⟦F⟧ \cap \mathrm{dom}(R)$はdom$(R)$の閉集合.
- dom(R)の部分集合Aに対して, $[\overline{A}]R \subset \overline{R[A]}$.
- fは点列連続.

ただし,

$$R⟦F⟧ := \{x \in X : [x]R \subset F\}$$

課題：この同値性が構成的数学においてはどのようになっているか？

参考文献

[BH94] Vasco Brattka and Peter Hertling: *Continuity and computability of relations*, Informatik Berichte No. 164, FernUniversitaet in Hagen (1994).

[Is92] Hajime ISHIHARA: *Continuity properties in constructive mathematics*, J. Symbolic Logic No. 56 (1992), 556-565.

[FY19] Hitoshi FRUSAWA and Y: *A note on continuity properties of relations*, rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., No. 52, pp.1-6 (2019).